Per l’educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura[1]

Raymond Duval
Professore emerito Université du Littoral Côte d’Opale, Francia

Noi preferiamo il vedere (το οραν) *a tutti gli altri nostri sensi.*
È soprattutto (μαλιστα) *la vista che ci fa conoscere il mondo,*
e che mostra (δηλοι) *una molteplicità di differenze.*
Aristotele, Metafisica, I, 1–9.

Abstract. *The way of seeing geometric figures is a very important topic for mathematics education, especially for the aims of geometry instruction in primary and low secondary school. The crucial issue is the contradictory role in their use for solving problem: both the perceptual obstacle and the heuristic support are cognitively necessary. The comparison between geometric figures and paintings, which are two opposite types of visualization, forces us to wonder whether the seeing process is the same for both kinds of visualisation or whether it is specific to each one. Assuming that seeing a visualization basically consists in recognizing something of what the visualization itself is showing, the comparison between seeing a geometrical figure and seeing a painting leads to four important results concerning visualization education. The first is the necessary distinction between the visual recognition of 2D shapes that may be thought as superimposed on each other and the visual recognition of 2D shapes that may be thought as juxtaposed to each other. Moving quickly from one recognition to the other is the same cognitive process required for using geometrical figures as a heuristic device and for looking carefully at the paintings. The second result is specific for seeing any iconic visualization. It is the necessary distinction between the degrees of iconicity, because the resemblance to what visualization shows changes with painting, drawing, sketching or diagrams. The third is specific for seeing any geometric figure being a non-iconic visualization. The recognition process is the counter-intuitive process of dimensional deconstruction of 2D shapes into 1D or 0D figural units. This process explains how geometric figures semiotically visualize geometric properties or geometric objects. Every geometric property corresponds to a relationship between at least two figural units. The last result is coextensive with the three previous ones. Seeing visualization, whether iconic or non-iconic, always involves something unsaid. It may be an implicit or silent saying to oneself, a word alone, or rather, on the contrary, an explicit written statement. But the relation between seeing and saying is gradually reversed, when moving from paintings to geometric figures. These four results highlight the key*

[1] Questo articolo sviluppa la comunicazione *Voir et créer dans l’art et en géométrie: proximités et divergences* fatta in occasione del Convegno internazionale in occasione dei 70 anni di Bruno D’Amore, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 08 10 2016. (Si veda: Duval, 2016).

cognitive factors to be considered as a priority in the didactic transposition of geometry for primary and low secondary school.

Keywords: painting, geometric figure, iconic visualization, non-iconic visualization, degrees of iconicity, 2D shapes, closed outline, figural unit, recognition, seeing, saying.

Sunto. *Le modalità di vedere le figure geometriche costituiscono un argomento molto importante per la didattica della matematica, in particolare per gli obiettivi dell'istruzione geometrica nella scuola primaria e all'inizio della secondaria. La questione cruciale è il ruolo contradditorio del loro uso per risolvere i problemi: sia l'ostacolo percettivo che il supporto euristico sono cognitivamente necessari. Il confronto tra figure geometriche e dipinti, che sono due tipi opposti di visualizzazione, costringe a chiederci se il processo di visione sia lo stesso per entrambi i tipi di visualizzazione o se sia specifico per ciascuno. Partendo dal presupposto che vedere una visualizzazione consiste essenzialmente nel riconoscere qualcosa di ciò che la visualizzazione stessa sta mostrando, il confronto tra vedere una figura geometrica e vedere un dipinto porta a quattro risultati importanti che riguardano l'educazione alla visualizzazione. Il primo è la necessaria distinzione tra il riconoscimento visuale di forme 2D che possono essere pensate come sovrapposte l'una all'altra e il riconoscimento visuale di forme 2D che possono essere pensate come giustapposte l'una all'altra. Passare rapidamente dall'un riconoscimento all'altro è lo stesso processo cognitivo richiesto per usare le figure geometriche come dispositivo euristico e per guardare attentamente i dipinti. Il secondo risultato è specifico per vedere qualsiasi visualizzazione iconica. È la necessaria distinzione tra gradi di iconicità, perché la somiglianza con ciò che mostra la visualizzazione cambia con la pittura, il disegno, lo schizzo o il diagramma. Il terzo è specifico per vedere la figura geometrica quando essa è una visualizzazione non iconica. Il processo di riconoscimento è un processo contro-intuitivo di decostruzione dimensionale di forme 2D in unità figurali 1D o 0D. Questo processo spiega come le figure geometriche visualizzano semioticamente proprietà o oggetti geometrici. Ogni proprietà geometrica corrisponde a una relazione tra almeno due unità figurali. L'ultimo risultato è coestensivo con i tre precedenti. Vedere la visualizzazione, che sia iconica o non iconica, implica sempre qualcosa di non detto. Può essere un detto implicito o muto, rivolto a sé stessi, anche solo una parola, o piuttosto al contrario una dichiarazione esplicita scritta. Ma la relazione tra vedere e dire è gradualmente invertita passando dai dipinti alle figure geometriche. Questi quattro risultati evidenziano i fattori cognitivi chiave da prendere in considerazione, come una priorità, nell'organizzazione della trasposizione didattica della geometria per la scuola primaria e l'inizio della secondaria.*

Parole chiave: pittura, figura geometrica, visualizzazione iconica, visualizzazione non-iconica, gradi di iconicità, forme 2D, contorno chiuso, unità figurale, ricognizione, vedere, dire.

Resumen. *La forma de ver las figuras geométricas es un tema muy importante para la educación matemática, especialmente para los objetivos de la enseñanza de la* *geometría en la escuela primaria y al inicio de la escuela secundaria. La cuestión crucial es su papel contradictorio relativo a su uso para resolver problemas: se necesitan cognitivamente tanto del obstáculo perceptual como del apoyo heurístico. La comparación entre figuras geométricas y pinturas, que son dos tipos opuestos de visualización, nos obliga a preguntarnos si el proceso de observación es el mismo para ambos tipos o si es específico para cada uno. Asumiendo que “ver” una visualización básicamente consiste en reconocer algo de lo que muestra la visualización misma, la comparación entre ver una figura geométrica y ver una pintura conduce a cuatro resultados importantes para la formación en el ver la visualización. La primera es la distinción necesaria entre el reconocimiento visual de las formas 2D que se pueden considerar superpuestas entre sí y el reconocimiento visual de las formas 2D que se pueden considerar yuxtapuestas entre sí. Pasar rápidamente de un reconocimiento a otro es el mismo proceso cognitivo que se requiere tanto cuando se usan figuras geométricas como dispositivo heurístico como cuando se miran cuidadosamente las pinturas. El segundo es específico para ver cualquier visualización icónica. Es la distinción necesaria entre los grados de iconicidad, porque el parecido con lo que muestra la visualización cambia con la pintura, el dibujo, el boceto o el diagrama. El tercero es específico para ver cualquier figura geométrica que sea una visualización no icónica. El proceso de reconocimiento es el proceso contrario a la intuición de la deconstrucción dimensional de formas bidimensionales en unidades figurativas 1D o 0D. Este proceso explica cómo las figuras geométricas visualizan semióticamente propiedades u objetos geométricos. Cada propiedad geométrica corresponde a una relación entre por lo menos dos unidades figúrales. El último resultado es co-extensivo con los tres anteriores. Ver la visualización, ya sea icónica o no icónica, siempre implica algo no dicho. Puede ser un decir implícito o silencioso para sí mismo, solo una palabra, o más bien lo contrario, hasta una redacción explícita. Pero la relación entre ver y decir se invierte gradualmente de las pinturas a las figuras geométricas. Estos cuatro resultados destacan los factores cognitivos clave que se deben tener en cuenta, como prioridad, en la organización de la transposición didáctica de la geometría para la escuela primaria y el inicio de la escuela secundaria.*

Palabras clave: pintura, figura geométrica, visualización icónica, visualización no icónica, grados de iconicidad, formas 2D, perfil cerrado, unidad figurativa, reconocimiento, ver, decir.

1. Premessa: considerazioni preliminari

Tanto in geometria elementare quanto in pittura, bisogna abbandonare la nozione di “spazio” perché è una nozione equivoca. Questo almeno per cogliere i processi cognitivi di esplorazione e composizione in questi due domini nei quali la vista è essenziale, e dove bisogna “vedere” *con i propri occhi, anzi, soprattutto con i propri occhi*. Ed è questa esigenza cognitiva di “vedere” che guida l’uso euristico delle “figure geometriche” nella risoluzione dei problemi. Alla nozione equivoca di spazio, bisogna sostituire quella di *unità figurale di dimensione nD/mD*, nella quale il numeratore indica il numero di dimensioni di *quel che è dato a vedere* (3D, 2D, 1D o 0D) e il denominatore il numero di dimensioni *nel quale si vede* quel che è dato a vedere, dunque solo 2D o 3D.

La nozione di unità figurale nD/mD è necessaria per non confondere tutti i problemi epistemologici, cognitivi e didattici che sono posti dal rapporto paradossale fra matematica e realtà. Infatti, fra matematica e realtà c'è un divario "ontologico" profondo, e tuttavia la matematica si rivela necessaria per la conoscenza, allo stesso tempo teorica e pratica, della realtà. Questo divario ontologico è quello che separa e allontana la percezione diretta degli oggetti 3D/3D da tutte le rappresentazioni visuali 2D/2D o 3D/2D intenzionalmente prodotte su una superficie materiale, o dematerializzate come avviene sullo schermo di un computer. Noi chiameremo *visualizzazione* tutte le rappresentazioni visuali intenzionalmente prodotte, da non confondere con i fenomeni fisici e ottici di riflessione e di immagine. Infatti, *non c'è nulla in comune fra il "vedere" percettivamente gli oggetti stessi, o i loro riflessi, e il "vedere" solo le immagini, i disegni, gli schemi o le figure che ne vengono fatti in un processo di costruzione o di creazione*. Contrariamente al principio fenomenologico citato sopra, le differenze che mostrano le rappresentazioni visuali sono estremamente ridotte rispetto all'inesauribile molteplicità sensibile che la vista fa scoprire (Aristotele, *Metafisica*, A, 980a, 25–27) (Reale, 2000). L'ostacolo contro il quale si scontra l'introduzione della geometria elementare in primaria e in secondaria proviene da questo divario ontologico e cognitivo fra questi due modi di vedere, che nulla hanno in comune fra loro. Tale ostacolo non si presenta nello stesso modo per gli insegnanti (o per i didatti) e per gli allievi. Per gli insegnanti, la questione cruciale è: In che modo gli allievi possono passare dalla percezione 3D/3D alla comprensione matematica delle "figure geometriche"? Per gli allievi, la questione cruciale è tutt'altra: Come sapere quale proprietà o quale formula usare a partire da una "figura geometrica" della quale si dice che modellizza una situazione di realtà?

La "relazione fra quei due mondi possibili" che sono l'arte e la matematica offre un approccio intuitivo alla complessità cognitiva delle due questioni sopra riportate.[2] Se ci si attiene alla geometria e alle rappresentazioni pittoriche, *questi due mondi hanno questo in comune, che essi visualizzano*, ciascuno a modo suo, *le organizzazioni possibili di forme diverse*, quelle che si trovano nella realtà e *quelle che non vi si trovano ma che contribuiscono ad allargarne il campo*. Ma, per mettere in evidenza questa relazione, non serve a nulla mettere in parallelo un quadro e la conoscenza matematica della quale esso sembra essere un'applicazione, né sovrapporre una figura geometrica all'immagine della situazione reale che essa modellizza. Queste sono le pratiche che si trovano più o meno frequentemente nei manuali scolastici. La

---

[2] Parafrasiamo qui il sottotitolo dell'opera di D'Amore (2015), che propone una reale sintesi su questa questione: *identità tra due mondi possibili*.

relazione si situa non in quel che è costruito, composto, illustrato o mostrato, ma in quell'atto cognitivo fondamentale che è il modo di "vedere", cioè nello sguardo, dato che lo sguardo può riconoscere o non riconoscere ciò che è dato a vedere. E qui siamo al confine di *un altro divario cognitivo*, *quello fra conoscere e riconoscere*.

"Vedere" è un atto che richiede *al primo colpo d'occhio* due tipi di riconoscimento:

- il riconoscimento visuale delle forme che sono date a vedere;
- il riconoscimento cognitivo degli "oggetti" che le forme visualmente riconosciute rappresentano.

Nella percezione degli oggetti 3D/3D questi due tipi di riconoscimento non sono quasi mai distinti, perché sono simultanei. Non capita lo stesso nella visualizzazione, cioè in tutte le rappresentazioni piane 2D/2D e 3D/2D. Questi due tipi di riconoscimento restano disgiunti, anche quando quel che è disegnato o dipinto "assomiglia" a quel che è rappresentato. Può trascorrere un lasso di tempo più o meno lungo fra i due riconoscimenti, in quanto essi non dipendono dagli stessi processi semio-cognitivi.

Per mettere in evidenza la complessità di questi processi di riconoscimento in geometria, cerchiamo di paragonare il funzionamento semio-cognitivo della visualizzazione geometrica con quello della visualizzazione pittorica. Questo paragone si baserà sui quattro punti seguenti:

I. I due principi del riconoscimento visuale delle forme e i gradi di libertà dello sguardo, che sono essenzialmente gli stessi per la visualizzazione geometrica e la composizione pittorica.
II. I tre tipi di riconoscimento cognitivo delle forme. Ogni sguardo su una visualizzazione, sia essa geometrica o pittorica, implica una verbalizzazione silenziosa. La divergenza fra le figure geometriche e i quadri dipinti inizia con il dire se viene o no esplicitata questa verbalizzazione silenziosa. Il distacco richiesto dal modo matematico di vedere comincia con la decostruzione dimensionale delle forme.
III. La conquista della visualizzazione: costruire o comporre forme 2D/2D per vedere in 3D/2D gli oggetti rappresentati. Ovviamente, questo è il punto che ha attirato maggiormente la nostra attenzione, in quanto costituisce una soglia sia nello sviluppo della geometria, sia nella storia dell'arte. Infatti, è il punto d'incrocio fra sguardo, percezione, ottica e visualizzazione geometrica. Ma quel che ha attirato meno attenzione finora è il fatto che esso ha paradossalmente imposto una completa opposizione fra il riconoscimento cognitivo delle forme e le grandezze stimate o misurate.
IV. Lo sguardo nel lavoro matematico e nei due registri di visualizzazione. Non si può parlare di visualizzazione geometrica, senza paragonarla a un altro tipo di visualizzazione matematica che ha progressivamente finito con il soppiantarla, cioè la visualizzazione analitico-grafica.

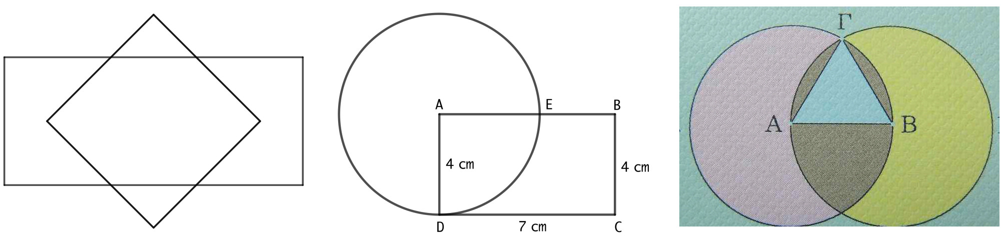
Potremo allora ritornare all'ostacolo con il quale si scontra l'introduzione della geometria elementare in primaria e in secondaria e sulle due questioni cruciali che esso pone.

Quali conseguenze didattiche per l'insegnamento della geometria elementare?

2. I due principi del riconoscimento visuale delle forme e i gradi di libertà dello sguardo

Per partire, diciamo subito che una forma è un *contorno chiuso*, cioè un'*unità figurale 2D/2D* che si distingue da uno sfondo che ovviamente non deve essere confuso con il supporto materiale della rappresentazione. Questo contorno chiuso può distaccarsi in due modi, sia come una macchia scura o luminosa su uno sfondo chiaro o su uno sfondo scuro, *e allora la forma è data dai bordi della macchia*, sia attraverso linee tracciate intenzionalmente, e allora la forma è data dal contorno tracciato.

Questa definizione è evidentemente insufficiente, in quanto essa non permette né di porre, né di comprendere il problema del riconoscimento visuale delle forme che è al centro di tutto. Questo problema si pone *quando una rappresentazione visuale contiene almeno due forme*, come nei tre esempi che seguono, ed essa non è ridotta a una sola forma come nelle rappresentazioni che illustrano le definizioni di figure geometriche elementari (triangolo, quadrilatero convesso, cerchio ecc.). Questa situazione è la sola a essere importante per il problema del riconoscimento visuale delle forme in geometria. Anche per non confonderla con le forme isolate che illustrano le definizioni, noi parleremo di "configurazione" e non di "figura geometrica".



A. Configurazione non codificata.

B. Configurazione doppiamente codificata (lettere e misure).

C. Configurazione codificata.

Figura 1. Tre configurazioni costruibili strumentalmente.

La sola differenza fra queste tre figure riguarda il codice che consiste in segni (lettere, cifre o simboli) che vengono aggiunti alle forme, letti e non solo guardati. La configurazione A non è codificata, la configurazione B è doppiamente codificata. Ora, *una codificazione si legge ma non si guarda in quanto essa non dà nulla da vedere o da riconoscere*. Le forme, al contrario, sono riconosciute immediatamente, con un solo colpo d’occhio, nella loro totalità. Esse si guardano. È dunque essenziale separare bene ciò che rientra nella codifica da ciò che rientra nel riconoscimento delle forme. Queste sono due variabili semio-cognitive tra loro indipendenti.

Due principi determinano i gradi di libertà nel riconoscimento visuale delle forme in tutte le rappresentazioni 2D/2D o 2D/3D in geometria elementare e in pittura.

Il primo principio è lo stesso formulato dalla *Gestalttheorie*; esso concerne il riconoscimento visuale (R.V.) sia di una forma isolata sia di forme associate ad altre simili o diverse:

R.V.1 *Il rapporto figura/sfondo che si impone immediatamente allo sguardo è percettivamente stabile. Esso non è spontaneamente invertibile.*

Questo fatto può essere facilmente verificato per le forme isolate su uno sfondo omogeneo. Per poter invertire questo rapporto, bisogna ricorrere al colore o per la parte interna del contorno chiuso o per la parte esterna. Ma questo si verifica anche quando c’è una sovrapposizione parziale di due forme o quando l’una è inscritta nell’altra. L’interesse di questo principio è nella sua conseguenza:

R.V.1' *Il riconoscimento visuale di forme 2D si fa in opposizione a quello di altre forme possibili che restano sullo sfondo e che sono dunque visualmente nascoste*.

Per poter vedere anche queste altre forme, bisogna esercitare lo sguardo a invertire il rapporto figura/sfondo che s’impone immediatamente allo sguardo.

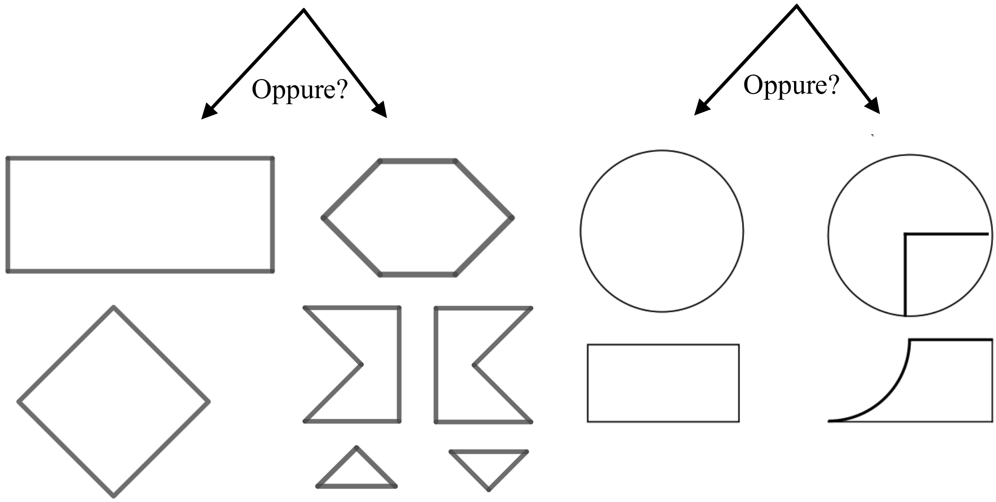
Il secondo principio è necessario per comprendere l’uso euristico delle figure in geometria elementare. In una rete di linee tracciate, ci sono tante forme quanti sono i contorni chiusi possibili. È quindi necessario distinguere due tipi di contorni chiusi:

- quelli che si giustappongono come in un pavimento, regolare o irregolare, e che costituiranno lo sfondo della figura;
- quelli che si sovrappongono e che si impongono al riconoscimento visuale secondo le leggi gestaltiche della percezione delle forme, nascondendo in tal modo le forme giustapposte.

Da qui il secondo principio del riconoscimento visuale:

R.V.2 *In una configurazione, non tutti i contorni chiusi possono essere visti contemporaneamente o l’uno in alternativa all’altro. Le forme che s’impongono immediatamente allo sguardo come sovrapposte l’una all’altra impediscono il* *riconoscimento visuale di quelle che sono giustapposte. Il tipo di riconoscimento che s'impone a prima vista occulta l'altro*.

Ci sono quindi due diverse modalità (Figura 2) di vedere le configurazioni A e B che appaiono sopra (Figura 1), anche se la sovrapposizione di due forme è quella che si impone immediatamente allo sguardo, in modo così ovvio che occulta quella per giustapposizione.



2 forme sovrapposte oppure
5 forme giustapposte

2 forme sovrapposte oppure
3 forme giustapposte con il quarto di cerchio

Figura 2. Due sguardi diversi su una stessa configurazione.

Nella configurazione C della Figura 1, i due modi di vedere dipendono da ciò che viene riconosciuto come sfondo della configurazione (R.V.1): o i due cerchi parzialmente sovrapposti sono presi come sfondo, e la figura è allora il triangolo ΑΒΓ; o, al contrario, il rettangolo intero viene preso come sfondo, e la figura è allora la sovrapposizione parziale di due cerchi nei quali i segmenti ΑΒ, ΒΓ e ΑΓ sono tre raggi dei due cerchi (Duval, 2015, p. 155). Possiamo quindi formulare la condizione cognitiva necessaria per l'uso euristico di una configurazione costruita strumentalmente:

R.V.2' *Affinché una configurazione svolga un ruolo euristico nella risoluzione di un problema, è necessario essere in grado di* riconoscere tutti i contorni chiusi possibili*, quelli riconosciuti per sovrapposizione e quelli riconosciuti per giustapposizione*.

Senza l'acquisizione di questa capacità che va contro l'evidenza percettiva immediata, lo sguardo rimane cieco di fronte a qualsiasi configurazione per risolvere i problemi di geometria elementare.

Questo principio mostra evidentemente solo prerequisiti cognitivi e innaturali per l’uso euristico delle configurazioni. Ma, per descrivere il processo euristico stesso, esso deve essere riformulato in termini di operazioni da eseguire, le quali spesso portano ad arricchire la configurazione iniziale tracciando nuove linee:

R.V.2" *Qualsiasi figura o qualsiasi contorno di una data configurazione è scomponibile in diversi contorni chiusi, della stessa forma o di forme diverse. I nuovi contorni ottenuti, simili ai pezzi di un puzzle, possono essere ricombinati per ottenere una configurazione diversa da quella di partenza*.

Così un quadrato può essere scomposto in quattro quadrati, che possono poi essere riconfigurati in un rettangolo. Oppure può essere suddiviso in due triangoli, che possono essere riconfigurati in un mezzo quadrato la cui area è uguale a quella del quadrato iniziale (Platone, *Menone*, 83 a-d) (Bonazzi, 2010). Un parallelogramma può essere scomposto in un triangolo e un trapezio rettangolo, i quali possono essere riconfigurati in un rettangolo e così via. Questo tipo di decomposizione, che altrove abbiamo chiamato “mereologico”, è alla base di molte dimostrazioni puramente figurali del teorema di Pitagora (Duval, 1995b, p. 152).

In geometria elementare R.V.1' e R.V.2" sono i due approcci euristici fondamentali per la risoluzione di problemi, *indipendentemente da ogni ipotesi data* (Padilla Sanchez, 1992).

In arte, R.V.1 è particolarmente importante nelle rappresentazioni figurative, perché consente la distinzione tra le diverse profondità di piano, privilegiando il riconoscimento per sovrapposizione rispetto a qualsiasi riconoscimento per giustapposizione. Nelle rappresentazioni non figurative, invece, R.V.2 può risultare fondamentale.

Prendiamo come esempio i due mosaici del I secolo, scoperti a Saint-Romain-en-Gal (Museo Gallo-Romano di Saint-Romain-en-Gal, Vienna) (A e C in Figura 3).

A. Apprensione visiva locale.

B. Apprensione visiva globale.

C. Un effetto *moiré* (di distorsione) di forme ondeggianti a partire da una configurazione elicoidale. L’apprensione locale si fonda sulla continuità dell’apprensione globale.

Figura 3. Due mosaici.

Nei mosaici A e B si giustappongono tre tipi di contorni chiusi di *rombi e quadrati dello stesso colore scuro*, i cui rispettivi lati sono separati da *strisce bianche*. Il contrasto dei colori introduce una variazione nel rapporto figura/sfondo come per il mosaico C. Che cosa si impone allo sguardo? Per rispondere a questa domanda, non è sufficiente prendere in considerazione la relazione tra la figura e lo sfondo, occorre anche prendere in considerazione il focus dello sguardo che può rimanere legato all’apprensione locale (A) o globale (B), oppure passare dall’una all’altra.

Per quanto concerne l’apprensione locale, sono immediatamente riconoscibili tre tipi di contorni chiusi, in funzione delle variazioni di visibilità che R.V.1 consente:

- i quadrati scuri non possono essere visti senza i quadrati bianchi con i quali formano una configurazione elementare che si distingue dallo sfondo dell’intero mosaico;
- i rombi scuri possono essere riconosciuti separatamente ma il loro riconoscimento cambia a seconda dello sfondo al quale sono rapportati; essi appaiono come rombi in relazione allo sfondo bianco dal quale si

distinguono; ma, rispetto ai due quadrati vicini al di sopra e al di sotto, essi appaiono come dei quadrati, dando così l’illusione di gradini di una scala.

Nell’apprensione globale, lo sguardo introduce una prospettiva sulla rappresentazione visuale 2D/3D, che è il mosaico. Altri due tipi di contorno chiuso appaiono secondo lo stesso principio del riconoscimento visuale:

- configurazioni di quattro quadrati che circondano un rombo; queste configurazioni sembrano essere sovrapposte per l’alternarsi di orientamento dei rombi;
- configurazioni decagonali il cui profilo chiuso è tratteggiato da bordi bianchi; esse giustappongono le configurazioni elementari e i rombi visualmente riconosciuti nell’apprensione locale (4 quadrati, 3 rombi e 2 mezzi rombi).

Esistono cinque tipi di contorni chiusi riconoscibili. Ma il riconoscimento di alcuni potrebbe escludere quello di altri (R.V.1’). Questo ci permette di identificare una prima relazione tra il modo matematico di vedere una figura in geometria per usarla euristicamente, e il modo di vedere in pittura per scoprire la sua composizione e il suo potere di visualizzazione o evocazione. *Deve essere possibile esplorare e riconoscere tutti i contorni chiusi possibili che l’immagine contiene* (R.V.2’). In questo esempio, il riconoscimento *visuale* per sovrapposizione non interviene. Ma si possono facilmente trovare rappresentazioni nelle quali esso riveste un ruolo importante.

Il mosaico C è realizzato secondo lo stesso principio di giustapposizione dei contorni chiusi. La prima differenza riguarda la riduzione dei contorni chiusi giustapposti a un singolo tipo: triangoli che si distinguono solo per il loro colore. La seconda differenza riguarda una giustapposizione circolare, la dimensione dei triangoli che diminuisce regolarmente al diminuire della loro distanza dal centro. Ciò porta non solo a neutralizzare ogni distinzione tra figura e sfondo, ma anche a fondere ogni apprensione locale in un’apprensione globale. *Ciò che viene allora riconosciuto sono delle linee curve* che interferiscono come un moiré di forme ondulate da una configurazione elicoidale di quattro uccelli.

3. I tre tipi di riconoscimento cognitivo di quel che le forme rappresentano

Il riconoscimento di ciò che rappresentano le forme visualmente riconosciute rivela tre tipi di operazioni cognitive che sono indipendenti dal riconoscimento visuale delle forme.

3.1. Il riconoscimento iconico

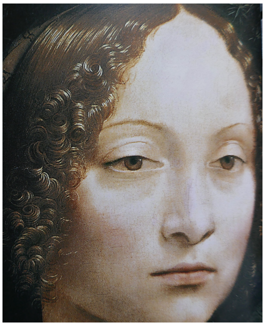
Questa operazione sembra così immediata e soprattutto così evidente da essere spesso confusa con il riconoscimento visuale della forma disegnata o costruita.

La si spiega attraverso la "somiglianza" tra la forma del contorno chiuso e quella dell'oggetto rappresentato. Ma la nozione di "somiglianza" è una nozione vaga. E spesso può essere difficile da riconoscere quando si tratta di oggetti reali. Le rappresentazioni 2D/2D o 3D/2D di oggetti reali (3D/3D) possono variare completamente, a seconda del punto dal quale vediamo l'oggetto che esse rappresentano: da vicino, da lontano, dal basso, dall'alto, dal davanti, di profilo, da dietro ecc. Così, per uno stesso oggetto, c'è una molteplicità di forme possibili. Da qui l'illusione di figure che sarebbero forme tipiche. Come possiamo riconoscere che un'immagine o un disegno assomiglia all'oggetto che rappresenta?

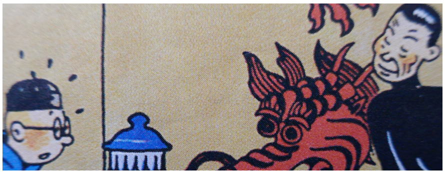
Bresson (1987) ha proposto una definizione di riconoscimento cognitivo (RC) e non più solo visuale di una configurazione 2D/2D. Essa parte dal principio che non sia sufficiente limitarsi alla sola congruenza tra il contorno chiuso globale della configurazione e il contorno dell'oggetto rappresentato; occorre anche tenere conto degli elementi potenzialmente presenti all'interno del contorno chiuso.

R.C.1 *Un'immagine, un disegno o uno schizzo assomigliano all'oggetto che essi rappresentano quando le relazioni di vicinanza tra gli elementi della configurazione conservano le relazioni di vicinanza tra gli elementi o le parti dell'oggetto rappresentato*.

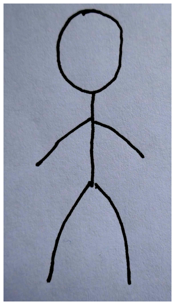
L'interesse di questa definizione è che essa consente di distinguere *tre gradi di iconicità*, come si può osservare nelle tre sottostanti rappresentazioni visuali di un volto (Duval, 2016).



A. Rappresentazione figurativa: Ritratto di Ginevra di Benci (Leonardo da Vinci, 1474?, tempera e olio su tavola, 38,8×36,7 cm, National Gallery of Art, Washington).



B. Rappresentazione schematica: volto di profilo e volto di fronte. (Remi, 1936, in bianco e nero; Remi, 1946, in colore).



C. Rappresentazione simbolica.

Figura 4. Gradi di iconicità nel riconoscimento visivo di un volto.

La *rappresentazione figurativa* (A) conserva:

- la somiglianza del contorno chiuso globale;
- le relazioni di vicinanza tra le parti caratteristiche di un volto;
- la somiglianza figurativa di ogni parte del volto (gli occhi, il naso, la bocca ecc.).

La *rappresentazione schematica* (B) conserva:

- la somiglianza del contorno chiuso globale;
- le relazioni di vicinanza tra le parti caratteristiche di un volto.

(Le parti dei volti, ridotte a dei tratti, hanno perso qualsiasi somiglianza figurativa propria).

La *rappresentazione simbolica* (C) conserva solo:

- la somiglianza del contorno chiuso.

Questo contorno rappresenta una testa o un volto nella misura in cui le relazioni di vicinanza tra gli elementi della configurazione conservano quelle tra le parti del corpo. Si ottengono così dei *simboli iconici* che consentono una comunicazione immediata ed economica, come in certi segnali stradali, o per codificare informazioni su una figura geometrica.

Si possono osservare nella storia della pittura molti tentativi di ricorrere a questi diversi gradi di iconicità che vanno da una somiglianza perfetta di certi ritratti e di certe nature morte con i volti, i fiori, i frutti, le cose che si possono vedere nella realtà, fino all'astrazione totale di una sensazione pura, ridotta a quella di uno o più colori. Il confronto tra i due quadri seguenti permette di osservare degli intermediari tra due dei tre gradi di libertà che abbiamo appena elencato.

Sopra Vitebsk, di M. Chagall, 1914.

Nudo blu III, di H. Matisse, 1952.

Figura 5. Rappresentazione figurativa onirica e schematizzazione simbolica.

Nel quadro di Chagall tutte le forme giustapposte sono iconiche, ma i loro rapporti di vicinanza non conservano la verosimiglianza di relazioni di vicinanza della realtà. Nel collage di Matisse, al contrario, nessuna delle forme giustapposte è visivamente perfettamente iconica di per sé, ma i loro rapporti di vicinanza compongono la sagoma di un corpo femminile.

Infine, c'è un tipo di rappresentazione iconica che è stata esplorata dal cubismo. Consiste nel *giustapporre delle rappresentazioni schematiche* che sono cognitivamente incompatibili perché associano *differenti punti di vista sullo stesso soggetto*. Ad esempio, parti di un volto viste frontalmente con altre viste di profilo come nei ritratti di Dora Maar o di D'Ambroise Vollard, di Picasso, o parti di uno scorcio di paesaggio come nel dipinto di Braque, *Le viaduc à l'Estaque*.

Figura 6. Ritratto di Dora Maar, di P. Picasso, 1937, Museo Picasso, Parigi, olio su tela, 92×65 cm.

Figura 7. Ritratto di Ambroise Vollard, di P. Picasso, 1909–1910, Museo Puškin, Mosca, olio su tela, 92×65 cm.

In geometria, le uniche rappresentazioni iconiche utili sono limitate alle rappresentazioni schematiche (B). Il ruolo di queste rappresentazioni, che non devono essere confuse con le "figure geometriche", è quello di modellizzare le situazioni reali per renderle visualmente congruenti con la "figura geometrica" che corrisponde al teorema da applicare (Duval, 2015, Figure 13 e 14, pp. 172–173). Ma, per adempiere a questo ruolo di modellizzazione, le rappresentazioni schematiche devono solo:

- conservare la configurazione dei componenti di una situazione reale;
- far sì che i rapporti tra gli elementi della situazione, ridotti a punti, non si limitino solo alle relazioni di vicinanza, ma tengano conto dell'orientamento delle distanze che li separano.

Qualsiasi cosa che potrebbe rientrare in una rappresentazione figurativa per mantenere la somiglianza con una situazione concreta è o rumore o distrattore.

3.2. Il riconoscimento discorsivo: dalla verbalizzazione silenziosa all'interpretazione o agli enunciati

C'è un'inter-penetrazione cognitiva di immagini e linguaggio, o più esattamente dello sguardo, del "dire" o del "dirlo a sé stessi". Le immagini parlano o richiamano parole, perché non c'è immagine senza linguaggio. Viceversa, la comprensione del linguaggio richiede la possibilità di vedere o "mostrare" ciò che è detto e, non riuscendo a vederlo, la possibilità di visualizzarlo, cioè di rappresentarlo visualmente. C'è bisogno di nominare ciò che si vede per "identificarlo". Ma questa inter-penetrazione avviene a livelli molto diversi di verbalizzazione, in quanto la relazione di predominanza tra lo sguardo e il "dire" può essere invertita fino all'assorbimento apparente dell'uno da parte dell'altro (Duval, 2014, pp. 244–245).

Qualsiasi riconoscimento iconico, comprese le rappresentazioni figurative, implica un riconoscimento discorsivo, che abbiamo chiamato *verbalizzazione silenziosa*. Questa verbalizzazione implicita consiste in un processo di doppia associazione:

[(un'immagine e una parola) e (una parola e un'altra parola)].[3]

È questo monologo interiore che James Joyce o Virginia Woolf hanno cercato di cogliere, oppure è questo linguaggio interiore, rivolto a sé stessi, che programma l'attività intenzionale a breve termine e che ne scandisce lo sviluppo. In questo senso, il linguaggio non segue l'azione, ma l'accompagna come suo controllo interno. Allo stesso modo, questa verbalizzazione è alla base di tutti i riconoscimenti iconici come un'eco dell'identificazione cognitiva di ciò che le forme visualmente riconosciute rappresentano. La mancata conoscenza di questa verbalizzazione cognitiva dà luogo all'illusione di un pensiero senza linguaggio e all'ipotesi di situazione di vicolo cieco dei processi a-semiotici per la formazione dei concetti.

Quasi sempre, quando parliamo di verbalizzazione, ci riferiamo alla verbalizzazione orale, vale a dire esplicita. Questa verbalizzazione spontanea, che riprende la verbalizzazione silenziosa, come ha mostrato Vygotskij, è tanto per sé stessi quanto per chi ascolta, o per colui al quale essa sembra rivolgersi. È *una verbalizzazione orale après coup*, *a posteriori*, successiva, per nominare o caratterizzare, nel contesto di uno scambio o di una comunicazione, l'attività che è stata appena compiuta.

Le parole associate alle immagini, ai disegni e alle figure che sono costruite strumentalmente, per dire ciò che esse rappresentano, rientrano in questa verbalizzazione orale a posteriori ma con un cambiamento importante: l'associazione non è più un'associazione spontanea che riprende la verbalizzazione silenziosa, ma *un'operazione discorsiva di designazione verbale* dell'oggetto visualmente rappresentato. E con questa operazione discorsiva, il rapporto di predominanza tra ciò che si riconosce visualmente e ciò che la verbalizzazione designa è totalmente invertito. L'operazione di denominazione può anche avvenire a dispetto di un riconoscimento figurativo visuale evidente.

Il celebre quadro che giustappone la rappresentazione figurale di una bellissima pipa e la frase "questa non è una pipa" (D'Amore, 2010, p. 493) illustra l'importanza di tale operazione di designazione verbale in relazione al riconoscimento percettivo immediato. Infatti la sua forza è non di "dire" che

[3] Freud, nel *Die Traumdeutung* (1899) (*L'interpretazione dei sogni*) ha fatto di questo processo di doppia associazione il principio della produzione di immagini oniriche e la chiave dalla loro interpretazione. Le parole sottendono le immagini.

cosa rappresenta il disegno, *ma di contraddire la verbalizzazione silenziosa che sta alla base del riconoscimento iconico*. Infatti, per chi non avesse mai visto una pipa, questo quadro sarebbe paradossale?

Lo stesso si può dire in geometria elementare per il rapporto tra le figure costruite strumentalmente e le ipotesi. Per una stessa configurazione costruita, si possono scegliere ipotesi diverse e quindi modificare il modo matematico di guardare la stessa configurazione. Gli esercizi e i problemi di geometria che si danno agli studenti a scuola sono tutti basati su questa possibilità di scelta.

Tuttavia, in geometria elementare, la designazione verbale è un'operazione cognitiva molto più complessa che nella pittura. E questo per due motivi. Il primo è che *le parole usate per l'operazione di designazione sono la condensazione di definizioni o di teoremi*, cioè enunciati la cui struttura interna è quella di un'implicazione o di un'equivalenza. Il secondo deriva dal fatto che è necessario *ricorrere a una codifica intermedia di certe unità figurali mediante lettere* per stabilire un ponte tra la configurazione e il vocabolario geometrico utilizzato. Le lettere appartengono agli enunciati e non alla configurazione di unità figurali 0D, 1D o 2D, cioè a "tre diversi sistemi di cose" che si distinguono solo per il loro numero di dimensioni e che possono essere designate solo da lettere, come Hilbert ha sottolineato nelle prime righe delle *Grundlagen der Geometry* (Duval, 1995a, pp. 282–284). In questo senso, Hilbert aveva semioticamente ragione, ma cognitivamente torto![4]

> *R.C.2 Il riconoscimento discorsivo dipende da un'operazione discorsiva di designazione. Questa operazione è indipendente dalla verbalizzazione silenziosa che ogni riconoscimento iconico comporta, e può perfino opporsi a questo riconoscimento.*

Ma quale può essere l'impatto cognitivo delle operazioni discorsive di designazione sulla verbalizzazione silenziosa? Tutta la questione sta nel sapere se questa operazione discorsiva neutralizza la verbalizzazione silenziosa, o addirittura può modificarla. Infatti questa continua a imporsi con il riconoscimento iconico delle rappresentazioni visuali e continua a controllare la verbalizzazione orale spontanea. Ed è qui che il riconoscimento discorsivo in pittura e il riconoscimento discorsivo in matematica iniziano a divergere.

Prendiamo il titolo del collage di Matisse *Nudo blu* (Figura 5). Le componenti di questo collage possono essere interpretate come rappresentazioni iconiche solo schematiche, appena accennate, di una figura

---

[4] Questo errore, accecante per gli studenti di scuola primaria o di scuola secondaria, apparve alla fine degli anni '60 con la riforma della cosiddetta "matematica moderna" che escludeva la visualizzazione delle figure nell'insegnamento della geometria nei corsi scolastici. Di fronte ai suoi effetti disastrosi, è stato necessario reintrodurre la visualizzazione geometrica. Sono state quindi sviluppate attività di trasmissione di messaggi per la costruzione di figure ed è nato il primo software di costruzione di figure, *Cabri*. Ma tutte queste attività di costruzione sono sufficienti?

femminile, ma solo se si vedono nel loro contesto finale. La designazione rinvia a un gioco di associazioni verbali che probabilmente hanno guidato il lavoro di creazione e che costituiscono il potere evocatore di questi collage. La donna, che i pezzi blu fanno risalire da uno sfondo bianco, è nuda come la Venere nel quadro di Botticelli (D'Amore, 2015, p. 229). Lo sfondo bianco è costituito dalle nuvole, i pezzi blu appaiono come spazi vuoti nel cielo … È un sogno a occhi aperti di piena estate, una visione dell'alba o un annuncio di primavera?

In geometria, le ipotesi che "dicono" che cosa rappresenta la configurazione costruita sono formulate mediante parole che sono la condensazione verbale di definizioni e teoremi, *vale a dire enunciati la cui struttura interna è l'implicazione operatoria*:

"condizioni da verificare una a una ⇒ conclusione da evidenziare per il passaggio successivo".

Questo è il livello più alto possibile di verbalizzazione, quello che costituisce i processi di ragionamento specifici delle dimostrazioni. Esso è in opposizione non solo con ogni rappresentazione iconica, ma anche con tutti gli altri tipi di produzioni discorsive che sono legate al linguaggio e mobilitano più o meno il processo cognitivo delle associazioni verbali: la descrizione, la spiegazione, l'interpretazione o l'argomentazione, e tutto ciò che rientra nel discorso. La verbalizzazione delle dimostrazioni in geometria annulla così sia la verbalizzazione silenziosa quanto la verbalizzazione orale a posteriori. Ma questa verbalizzazione autosufficiente e creatrice di conoscenza implica due cose: la presa di coscienza del suo modo cognitivo di funzionamento che è stranamente estraneo a ogni discorso, e un corpus di assiomi che sono coerenti. In altre parole, l'operazione di designazione verbale in geometria è un'operazione complessa, specifica, che si allontana da tutte le pratiche del linguaggio.

R.C.2' Il riconoscimento discorsivo, in geometria, dipende da un'operazione discorsiva di designazione che si limita alla distinzione di unità figurali che differiscono solo per il loro numero di dimensioni e che si basa sulle possibili relazioni tra le unità figurali.

Continuiamo a ripetere che in geometria le figure si guardano e si utilizzano in funzione delle ipotesi e che di conseguenza le figure sono figure codificate. È vero. Ma, anche ripetendolo, si resta su osservazioni superficiali, e non si compiono passi avanti sulle questioni relative all'insegnamento della geometria. *Infatti non dobbiamo confondere le operazioni discorsive di designazione* di ciò che è rappresentato geometricamente *con il contenuto delle ipotesi scelte*. Questa operazione si rivela anche necessaria affinché gli studenti possano semplicemente scrivere messaggi per fare costruire figure da altri studenti. Questa attività richiede in effetti che gli studenti prendano coscienza del fatto che ci sono sempre due modi diversi per designare la stessa unità figurale e che la “sequenza” di istruzioni è fatta sostituendo un modo di designare con un altro (Duval, 2014).

La designazione verbale delle unità figurali che compongono le forme (2D/2D) è un’operazione cognitivamente molto complessa. Essa riguarda sia i processi che controllano il modo matematico di vedere le configurazioni sia i processi che consentono di ragionare e risolvere problemi in geometria. E, soprattutto, questa operazione non tiene assolutamente conto delle dimensioni. Queste ultime richiedono misurazioni di lunghezza e portano alla sostituzione di numeri o valori numerici alle operazioni di designazione verbale delle unità figurali. Ogni operazione discorsiva di designazione in geometria si basa su quel processo cognitivo che ho chiamato la “decostruzione dimensionale delle forme” (Duval, 2005, 2015).

3.3. La decostruzione dimensionale delle forme visualmente riconosciute a colpo d’occhio

È questa operazione che fornisce la risposta alla cruciale questione epistemologica e cognitiva per l’insegnamento della geometria nella primaria e nella secondaria. In che modo figure o disegni possono visualizzare proprietà e oggetti geometrici?

Per rispondere a questa domanda, dobbiamo sostituire la nozione di unità figurale a quelle di “figura” e “disegno”. Questo perché la nozione di unità figurale *permette di integrare un dato fondamentale della geometria che non è la nozione di spazio, ma quella di numero di dimensioni dello spazio nel quale ci si situa e dunque nel quale avviene la visualizzazione*. Un’unità figurale è caratterizzata dal suo numero di dimensioni: 1D (un tratto dritto o curvo), 2D (un contorno chiuso), 3D/2D (un contorno chiuso che può apparire vuoto, o pieno, o in profondità) e 0D (i punti di intersezione di due unità 1D, *esclusi i punti sovrapposti* a un’unità figurale 1D per rappresentare un numero decimale o reale). Possiamo quindi definire l’operazione cognitiva di decostruzione dimensionale delle forme (Duval, 2015, p. 160; e Figura 10, p. 167).

R.C.3 *In geometria, qualsiasi contorno chiuso visualmente riconosciuto come forma 2D/2D o 3D/2D deve essere visto dimensionalmente come una configurazione di unità figurali 1D o 0D.*

È un’operazione che è tanto percettivamente anormale quanto geometricamente potente. Ma questa operazione non è concettuale. Essa non è la conseguenza dell’acquisizione di concetti o di proprietà geometriche elementari, ma il prerequisito cognitivo preliminare, ciò che l’insegnamento della geometria deve innanzi tutto trattare e sviluppare prima di ogni altra cosa. Perché?

Se analizziamo il vocabolario geometrico di base nella sua relazione con tutte le configurazioni che possono essere costruite strumentalmente, e non semplicemente disegnate a mano libera, notiamo che ci sono due tipi di termini le cui denotazioni sono radicalmente diverse (Duval, 2015, Figura 8, p. 164):

- termini che designano la relazione *tra due unità figurali della stessa dimensione oppure di dimensioni diverse* (parallela, perpendicolare, centro, tangente ecc.); questi sono termini che indicano "proprietà";
- termini che designano *delle configurazioni* (*almeno un contorno chiuso*) *che sono definite da almeno due proprietà* (triangoli, quadrilateri, cubi, cerchi, sfere ecc.); questi sono termini che indicano "forme geometriche" oppure "oggetti geometrici".

Il primo tipo di termini corrisponde alle relazioni che Hilbert considerava come i fondamenti della geometria: "Tra i punti, le rette e i piani, immaginiamo certe relazioni che esprimiamo con termini quali 'essere su', 'tra', 'congruente'; la descrizione precisa e matematicamente corretta di queste relazioni è data dagli assiomi della geometria" (Hilbert, 1899/1900, p. 11).

Per il secondo tipo di termini, bisogna aggiungere la possibilità di un confronto qualitativo tra due unità figurali della stessa dimensione, vale a dire le relazioni "maggiore di" o "minore di" o "uguale a".

Senza una presa di coscienza di questa operazione di decostruzione dimensionale che consente allo sguardo di vedere tutte le unità figurali di una configurazione, il vocabolario geometrico di base non ha senso e non può essere utilizzato. Si resta con quello che ho definito un "approccio botanico" alla geometria (Duval, 2005): impariamo a riconoscere determinate figure come si apprende a riconoscere o a disegnare le foglie degli alberi in una foresta.

Al contrario, per visualizzare la definizione di un oggetto geometrico, ad esempio un parallelogramma o un triangolo, non esiste una "figura tipo", ma una grande varietà di configurazioni (Duval, 2015, Figura 5, p. 160; Figura 6, p. 164).

La decostruzione dimensionale delle forme 2D/2D caratterizza un modo di vedere le figure costruibili con riga e compasso che è specifico della matematica e solo di essa. Tuttavia, essa presenta un legame con il modo puramente artistico di vedere in pittura. Infatti, così come le dimensioni non hanno alcuna importanza in pittura, tranne ovviamente la dimensione della superficie dipinta, che varia dalla miniatura di una medaglia agli affreschi murali o rupestri, la decostruzione dimensionale ignora totalmente le dimensioni delle unità figurali. *Nel modo matematico di vedere le "figure", le misure di grandezza non contano*. Detto in altro modo, la visualizzazione geometrica non ha alcun legame con una geometria empirica nella quale il primo gesto è il gesto concreto di misurare lunghezze per fare calcoli utilizzando formule, essendo queste lunghezze quelle dei lati di una "figura" o quelle di oggetti o superfici reali. Importa solo la dimensione delle molteplici unità figurali che rendono le “figure” più semplici ed elementari delle configurazioni complesse.

La vera domanda per un’introduzione della geometria alla primaria non è dunque sapere quali oggetti geometrici scegliere o quali attività di costruzione di figure “far fare”, ma *come far prendere coscienza del modo matematico di vedere le figure*, indipendentemente dalle loro proprietà e dalle ipotesi scelte per porre un problema.

Al di fuori della geometria, il modo di vedere che si impone è quello corrispondente a R.V.1. E gli allievi in classe non possono liberarsi dal riconoscimento percettivo delle forme a partire dai loro bordi, perché l’altro modo non ha niente di naturale (Duval, 1995b). Le definizioni, le spiegazioni e perfino le attività di costruzione delle figure non cambiano in alcun modo ciò che lo sguardo vede e riconosce immediatamente. È necessario un lavoro specifico per imparare a passare dal riconoscimento di una configurazione di unità figurali 2D/2D al riconoscimento di un insieme di unità figurali 1D come supporti dei bordi di una figura geometrica.

R.C.3' *In geometria, qualsiasi contorno chiuso visualmente riconosciuto deve essere immediatamente visto* a partire dalla rete di unità figurali 1D sottostanti *(linee rette o curve) da cui esso si distingue in quanto unità figurale elementare 2D (triangolo, quadrato ecc.)*.

In altre parole, non si tratta di imparare a costruire figure, ma di costruire e riconoscere la rete di rette sottostante a qualsiasi figura (Duval, 2015, Figura 7, p. 162). R.C.3' è la generalizzazione di R.V.2', vale a dire il prerequisito necessario per l’uso euristico delle figure. Concretamente, questo significa che fin dall’inizio i giovani studenti devono acquisire la capacità di “uscire dalla figura data” estendendo i lati disegnati e la capacità di aggiungere linee tracciate all’interno della figura per dividerla. Ciò presuppone, evidentemente, attività specifiche nelle quali si parte da “figure geometriche” che si possono nominare, ma anche attività che prendono in considerazione delle configurazioni parziali di cui si devono ricostruire tutte le linee che sono state cancellate (Duval & Godin, 2005). In altre parole, si tratta di figure o configurazioni incomplete. Queste attività di ricostruzione sono dei *veri problemi di esplorazione da risolvere con strumenti non graduati*. Per risolvere questi problemi di ricostruzione, si parte da una configurazione geometrica, iconicamente riconoscibile o no, e si cancellano parti più o meno importanti, *in modo tale da poter ritrovare le parti mancanti*. Il grado di cancellazione della configurazione data e la scelta degli strumenti per ricostituire ciò che è stato soppresso sono le due variabili didattiche di questo tipo di attività.

4. La conquista della visualizzazione: costruire o comporre forme 2D/2D per vedere gli oggetti rappresentati in 3D/2D

La percezione riguarda gli oggetti 3D/3D, vale a dire tutto ciò che può essere guardato da diversi punti di vista, ciò che è vicino o lontano, ma sempre direttamente accessibile, eventualmente spostandosi, e quel che può essere manipolato. Quando un oggetto 3D/3D può essere guardato senza soddisfare nessuno di questi tre criteri, come ad esempio una stella nel firmamento, parliamo di punto "all'infinito". Ciò che viene chiamato "geometria nello spazio" non è in realtà *che una disposizione di forme 2D/2D che si fonde in un'unità figurale 3D/2D* corrispondente a oggetti percepiti in 3D/3D. *Per ottenere questo risultato ottico e cognitivo* possono essere applicati due tipi di procedure tanto in geometria quanto in pittura.

4.1. Vedere i solidi e vedere il rilievo delle superfici

Quando si parla di "vedere", ovviamente nessuno confonderà:

- *quel che è dato a vedere*;
- *la visione*, vale a dire il modo in cui l'occhio cattura ciò che la luce dà a vedere;
- *lo sguardo, che riconosce ciò che viene visto*.

Ciò che viene dato a vedere è radicalmente diverso nella percezione degli oggetti 3D/3D e nelle rappresentazioni grafiche nD/2D (disegno, pittura, configurazioni geometriche) che si possono fare di esse. Allo stesso modo, lo sguardo non è la visione, nella misura in cui l'occhio umano nel suo funzionamento è irriducibile all'obiettivo di una macchina fotografica, a meno che non sia ridotto all'immagine retinica. Ma quando si tratta di "vedere" delle rappresentazioni nD/2D e non più degli oggetti reali 3D/3D, l'unica differenza importante è quella tra lo sguardo e ciò che si dà a vedere nelle "figure geometriche", schemi, schizzi o pittura.

È quindi necessario variare e confrontare ciò che le varie rappresentazioni visuali possibili nD/2D danno a vedere per studiare il funzionamento cognitivo dello sguardo. Per questo è essenziale distinguere le configurazioni geometriche che sono *figure trasparenti* e i dipinti o disegni e le creazioni artistiche che sono *figure in bianco e nero o a colori*. Questa variabile gioca sulla *stabilità o sull'oscillazione del numero di dimensioni delle unità figurali riconosciute al primo colpo d'occhio* e che assorbono tutte quelle di dimensioni più piccole (Duval, 2015, p. 160): 2D/2D o 3D/2D?

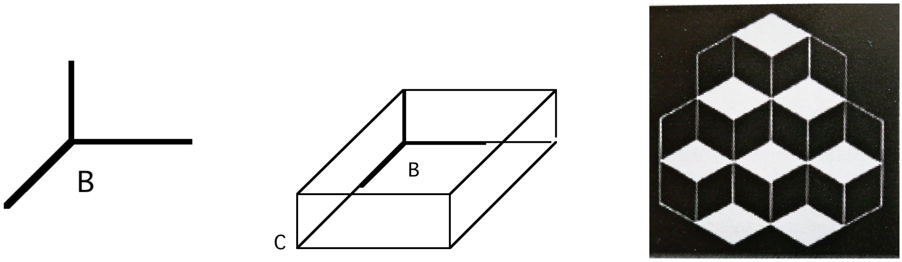


Figure trasparenti: oscillazione del numero di dimensioni.
Le tre linee che partono da B sono sullo stesso piano, oppure no? Lo spigolo CB della scatola è in primo piano o in secondo piano? La scatola è vista dal basso o dall’alto?

Figure in bianco e nero o a colori: oscillazione limitata alle unità figurali della stessa dimensione.
Sei o sette cubi?
(D’Amore, 2015, p. 441)

Figura 8. Variazioni su quel che è dato a vedere per costruzione o per composizione.

Il confronto tra la prima figura e la seconda mostra che è solo a partire da forme 2D, vale a dire contorni chiusi, che lo sguardo può riconoscere volumi o solidi 3D. Senza contorni chiusi, il riconoscimento è visualmente instabile, in quanto lo sguardo oscilla tra la vista di un elemento che appare in rilievo o esterno e la vista dello stesso elemento che appare incavato o interno. Per confrontare la seconda e la terza figura, bisogna usare il secondo principio del riconoscimento visuale (*supra*, R.V.2). La trasparenza della seconda figura consente di vedere *contemporaneamente per sovrapposizione le sei facce (2D) di un solido*. Perché qui ciò che si riconosce immediatamente è una singola unità figurale 3D e non la giustapposizione di sette unità figurali giustapposte. Nella terza figura, *l’uso dei colori separa i contorni chiusi* e impone al contrario *un riconoscimento per giustapposizione dei contorni chiusi*. Il primo principio del riconoscimento visuale consente quindi di vedere immediatamente a colpo d’occhio sei unità figurali 3D, che appaiono in rilievo su uno sfondo nero e non bianco (*supra*, R.V.1). Per vedere sette unità figurali, serve un ribaltamento dello sguardo, più difficile da effettuare. Ma esso diventa evidente se si inverte l’orientamento del quadro, in modo che la faccia superiore bianca del cubo superiore si trovi in basso.

L’uso di colori per coprire le superfici dei contorni chiusi offre possibilità inesauribili per la creazione artistica. Così, un dipinto è l’incontro tra ciò che viene dato a vedere per composizione e ciò che lo sguardo riconosce immediatamente. Il dipinto riprodotto sulla copertina del catalogo dell’esposizione delle opere di Vasarely dal 1933 al 1973 ne offre uno splendido esempio (Vasarely, 2011) (Figura 9). Ciò che è dato a vedere si verbalizza attraverso la descrizione della procedura di composizione (in basso a sinistra). Questa procedura è in qualche modo analoga a quella messa in opera in uno dei mosaici di Saint Romain-en-Gal (Figura 3C). *Ciò che lo* *sguardo riconosce rende esplicita la verbalizzazione silenziosa e in linea le metafore* (in basso a destra).

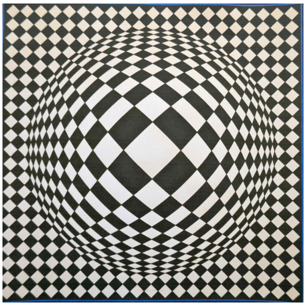
"Ho dipinto un quadro formato da una scacchiera bianca e nera che subisce una doppia deformazione, convessa, per ingrandimento del quadrato di base, e concava, per rimpicciolimento del quadrato di base della stessa scacchiera (…) Questa volta, tuttavia, ho ottenuto non solo un rigonfiamento, ma anche un avvallamento percettivo nella stessa tela" (Vasarely, citato in Ferrier, 1969, p. 79).		"L'ho battezzata con il nome della stella Vega, che si trova a 25 anni-luce dal nostro sistema solare. Al di là si trova l'universo in espansione: la condensazione e la fuga disperata delle galassie" (Vasarely, citato in Ferrier, 1969, p. 79).
A. Ciò che è dato a vedere attraverso la composizione di superfici giustapposte.	B. L'opera realizzata, 1965.	C. Ciò che lo sguardo riconosce, un'unità figurale 3D, e quel che essa rappresenta.

Figura 9. Fusione di una giustapposizione di forme 2D/2D in una unità figurale 3D/2D.

C'è un profondo divario cognitivo tra la percezione degli oggetti 3D/3D e il riconoscimento di solidi in una figura trasparente che sovrappone unità figurali 2D/2D. Ad esempio, si possono tenere nella propria mano le sei facce di una piccola scatola o di un cubo, ma *è impossibile vederle tutte allo stesso tempo*, senza far ruotare l'oggetto 3D/3D che si ha in mano. Ci sono sempre alcune facce nascoste. E questa è la sfida nell'introdurre "la geometria nello spazio". Questa non lavora sugli oggetti nello spazio, ma su ciò che viene dato a vedere attraverso costruzioni piane.

Come far passare dall'una all'altra? In effetti, non si tratta di riconoscere dal punto di vista del botanico un cubo, una piramide o qualsiasi altro poliedro regolare, né di descriverlo in base al numero dei suoi vertici, spigoli e facce. *Si tratta di riconoscere i diversi piani di taglio possibili dell'oggetto rappresentato e di riconoscere le forme 2D che si ottengono*. In altre parole, si tratta di decostruire dimensionalmente le rappresentazioni 3D/2D in rappresentazioni 2D/2D sulle quali si potrà ragionare. Questa operazione di decostruzione è cognitivamente diversa da quella delle unità figurali 2D in una configurazione di unità figurali 1D. Come far emergere questo tipo di sguardo negli studenti?

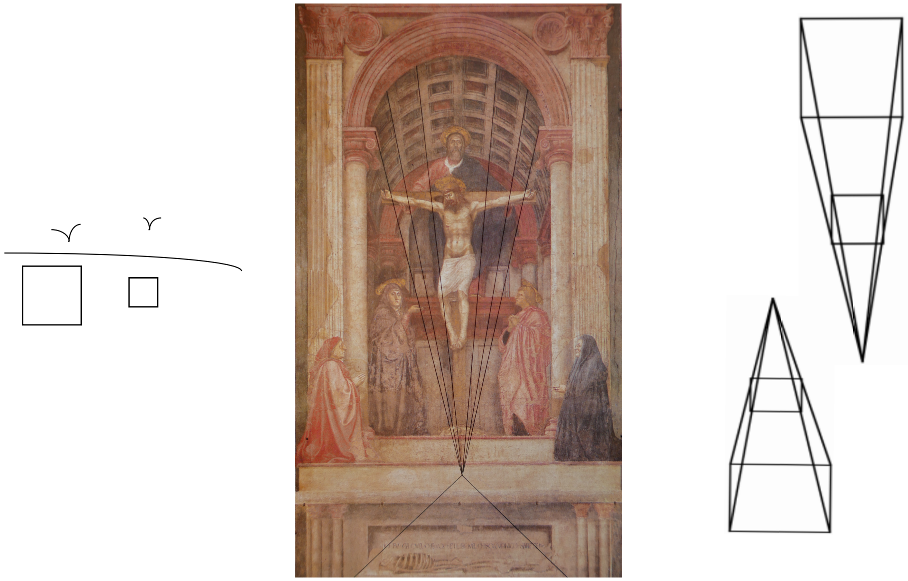
Non è sufficiente avere in un angolo dell'aula una collezione di modelli che possono essere osservati come si osservano cristalli e pietre (Sorrell, 1973). Bisogna disporre di due tipi di materiali: modelli traslucidi di alcuni poliedri notevoli, sui quali si possono tracciare linee, e un set di sagome delle diverse forme 2D che possono essere ottenute da ciascuno di questi modelli tagliandoli con un piano. Gli studenti possono quindi esplorare oggetti 3D/3D con oggetti 2D/3D e 1D/3D per trovare la figura 2D/2D che permette un ragionamento matematico.

È questo tipo di attività che rende possibile capire come si possono *studiare le forme tridimensionali riportandole su un piano*, senza fare geometria descrittiva alla Monge (Rommevaux, 1991, 1997, 1998).

4.2. Lo sguardo, la disposizione degli oggetti nello spazio e la prospettiva

L’invenzione della prospettiva è stato un avvenimento tanto decisivo per lo sviluppo della geometria come lo fu per lo sviluppo della composizione pittorica (Bkouche, 1988, 1994). Essa contraddistingue la presa in considerazione del *punto di vista* nella *rappresentazione piana 2D/2D di ciò che viene percepito non solo in 3D/3D come un solido, ma anche a distanze sempre più grandi dal punto di vista*. La presa in considerazione di questi aspetti è essenziale per comprendere l’invenzione della prospettiva. *Perché, per poter dissociare la vista dallo sguardo e da ciò che un occhio capta, serve un dispositivo di osservazione*: lo stetoscopio Alhazen e soprattutto quello usato da Brunelleschi, costituito da un foro praticato su un quadro e uno specchio. Occultando la vista diretta del battistero di San Giovanni e sostituendo ad essa l’immagine riflessa nello specchio dell’immagine che era stata dipinta alla rovescia, era possibile notare la perfetta coincidenza di una parte del battistero e di una parte dell’immagine dipinta alla rovescia mediante questo dispositivo. Così Brunelleschi dimostrò che la costruzione bidimensionale di rette concorrenti in un singolo punto permetteva di rappresentare fedelmente la percezione diretta di oggetti tridimensionali così come le loro reciproche distanze da chi li guarda (Comar, 1992, pp. 32–33).

Il passaggio, o il salto, dalla percezione 3D alla rappresentazione 2D di ciò che viene percepito, risulta dalla messa in corrispondenza della linea d’orizzonte con la costruzione di rette concorrenti in un punto. La linea d’orizzonte è *la linea di fuga dello sguardo*. Essa separa ciò che è sulla superficie terrestre da tutto ciò che è nel cielo (Duval, 1995b, p. 187). La costruzione di rette concorrenti si riferisce a una trasformazione geometrica: l’*omotetia*. C’è una considerevole variazione delle configurazioni omotetiche possibili, essendo alcune riconosciute come piane e altre in prospettiva (Lemonidis, 1990, pp. 58–59). Il dispositivo di Brunelleschi ha quindi portato a definire tecnicamente *un punto di fuga rispetto* al punto di vista. Evidentemente questo punto di fuga può trovarsi sulla linea di fuga che è l’orizzonte o al di fuori di essa. E non deve essere confuso con *un punto all’infinito*, che è il punto di intersezione delle rette concorrenti quando esse sono considerate come la rappresentazione matematica di rette parallele dunque infinite. La *Trinità* di Masaccio, che è stata dipinta nella chiesa di Santa Maria Novella poco dopo l'invenzione della prospettiva di Brunelleschi (1425), fu una prima applicazione alla composizione pittorica (D'Amore, 2015).



Al di sopra e al di sotto della linea d'orizzonte che è la linea di fuga della superficie della Terra.

Il punto di fuga è sulla linea d'orizzonte, e qui la linea d'orizzonte è all'altezza degli occhi di chi guarda (Thuillier, 1984).

Rette concorrenti e omotetia. Una gamma illimitata di configurazioni (Lemonidis, 1990).

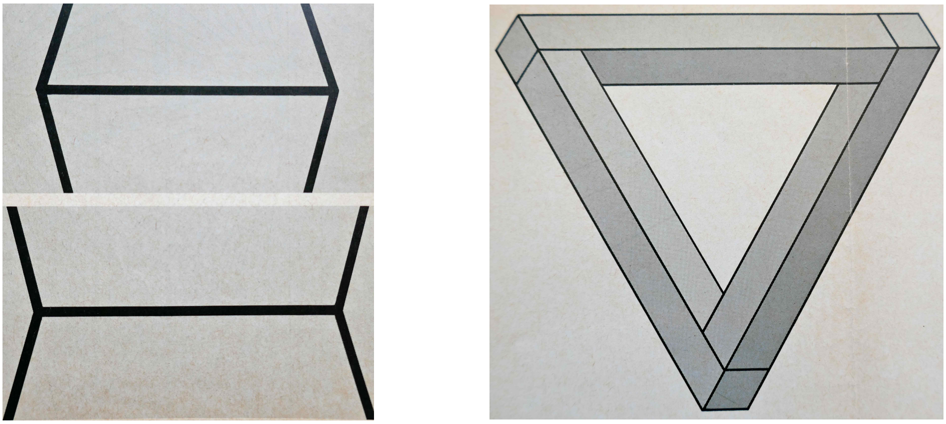
Figura 10. All'incrocio dello sguardo, della percezione, dell'ottica e della visualizzazione geometrica.

La costruzione della prospettiva non deve essere confusa con il problema della costruzione di colonne che devono essere rigonfiate per compensare la distorsione ottica della percezione a una certa distanza ed essere viste perfettamente verticali, cioè l'èntasi. L'esempio più famoso è quello delle colonne del Partenone, percettivamente riconosciute come parallele. Ictiros, Callicrate e Fidia, gli architetti, non disponevano della prospettiva.

4.3. Una separazione necessaria in geometria e, forse, in pittura: la separazione delle forme dalle dimensioni

Questa separazione è fondamentale per un'analisi semio-cognitiva della visualizzazione matematica e del modo matematico di vedere una configurazione costruita strumentalmente. Esse conducono a trattamenti matematici in registri radicalmente diversi. E questi trattamenti matematici si traducono in gesti e attività concrete radicalmente diversi. Da un lato, dividere, capovolgere, trasformare una forma in un’altra, riconfigurare ecc. Dall’altro, misurare per calcolare, utilizzando delle formule. Per evidenziare questi due versanti opposti della geometria, possiamo prendere l’esempio delle illusioni percettive. La scelta di questo esempio è pertinente perché le illusioni percettive sembrano corroborare l’opposizione, spesso fatta in didattica della matematica, tra il “disegno” che si vede e la “figura”, vale a dire tutte le possibili variazioni del disegno che non alterano una data proprietà.

Ciò che chiamiamo “illusioni percettive” sono rappresentazioni visuali che sono costruite strumentalmente, vale a dire “figure geometriche”. Ma il fenomeno essenziale che esse rivelano è l’esistenza di due tipi di illusioni. Il primo tipo si basa unicamente sulla stima delle dimensioni e il secondo sul riconoscimento delle forme 2D/2D o 3D/2D indipendentemente da qualsiasi dimensione (Gregory, 1968).



A. Contraddizione nella stima visuale delle dimensioni: illusione di Müller-Lyer (1889).

B. Visualizzazione di una forma 3D impossibile: il triangolo o tribarra dei Penrose (Penrose & Penrose, 1958).

Figura 11. Due tipi eterogenei di illusioni nella visualizzazione geometrica.

La costruzione di Müller-Lyer può essere vista alternativamente in rilievo, incisa o piatta come la prima costruzione in Figura 11. Ma non è questo che l’ha resa interessante. Essa ha permesso delle osservazioni misurabili molto semplici che potevano essere fatte fare agli studenti della primaria come introduzione alla geometria. Tutto ciò che serve è un materiale molto semplice da preparare.[5]

[5] Su un cartoncino bianco, si costruisce la figura in alto o quella in basso (Figura 11A). Su una striscia di carta si costruisce l’altra figura amputata di una delle frecce. Sul retro di questa

La visualizzazione geometrica dei Penrose è, per la sua costruzione 2D, assolutamente irrealizzabile in 3D/3D. Essa ha ispirato molti artisti tra cui Escher (D'Amore, 2015, pp. 408–411). Ma essa costituisce un problema matematico: Quali segmenti devono essere cancellati o quali segmenti si devono prolungare, rendendo trasparente la figura, affinché il triangolo dei Penrose diventi la rappresentazione visuale di un assemblaggio di tre travi di legno? L'interesse di questo problema è di mostrare il punto in cui la visualizzazione geometrica e la creazione artistica visiva divergono totalmente. È anche un problema didattico perché permette di far prendere coscienza di come si passa da uno sguardo in 2D/2D a uno in 3D/2D.

Ciò che sorprende è che questa separazione tra il riconoscimento delle forme e delle dimensioni, che corrisponde a due campi di variabili indipendenti, non è mai stata fatta da un punto di vista cognitivo o didattico. E questa mancata separazione tende a privilegiare un'introduzione della geometria che privilegi delle attività centrate sulle dimensioni, cioè sulla costruzione di figure che comportano misurazioni e sul calcolo delle dimensioni usando formule stabilite per figure tipiche del triangolo e dei quadrilateri regolari.

5. Lo sguardo nel lavoro matematico e i due registri di visualizzazione

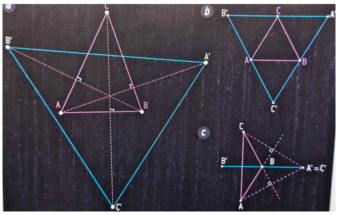
La rivoluzione semiotica in matematica non fu dovuta solo all'emergere dell'algebra in appena due secoli, ma anche all'emergere di un *nuovo registro di visualizzazione* che è indissociabile da essa (Duval, 2017, pp. 8–9). Fondato su un sistema di assi orientati e graduati, esso permette non solo di convertire le equazioni in curve e superfici, ma anche di effettuare conversioni inverse, sebbene ciò sia molto più complesso dal punto di vista cognitivo. Questa rivoluzione semiotica non ha solo aperto nuovi domini di studio in matematica, ma ha in un certo senso imposto un nuovo modo di fare matematica e soprattutto geometria. Per non confonderlo con il registro della visualizzazione geometrica, si potrebbe chiamarlo *registro cartesiano* o più esattamente *registro analitico-grafico*.

Dopo appena qualche dozzina d'anni, questo secondo registro di visualizzazione è diventato, con i computer, il principale strumento di visualizzazione. Questo perché, rispetto a tutte le costruzioni geometriche che si possono eseguire su carta con riga e compasso (Frère Gabriel-Marie, 1920), esso presenta tre vantaggi incomparabili. Prima di tutto è considerevolmente più potente. E poi, è dinamico, in modo tale che si possano seguire sullo

striscia si indicano dei punti di riferimento di lunghezze. Questa striscia può scorrere sul primo cartoncino. Il compito consiste nello spostare la striscia scorrevole per pareggiare visivamente la lunghezza di una figura con quella dell'altra. Per una data lunghezza di 5 cm per la prima figura, ci può essere una sovrastima o una sottostima di quasi il 50%.

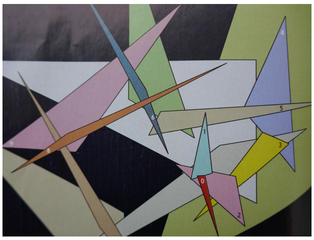
schermo le trasformazioni di una curva o di una qualsiasi figura disegnata. Infine, reagisce quasi istantaneamente al comando senza dover fare altro che premere un tasto della tastiera o cliccare su una “icona”. Qual è la relazione tra questo nuovo registro di visualizzazione e il registro della visualizzazione geometrica? E, soprattutto, lo sguardo rimane lo stesso, con l’aggiunta di tutti i vantaggi e i miglioramenti che abbiamo appena indicato?

Se ci atteniamo al solo punto di vista matematico, ci asterremo dal rispondere e ci accontenteremo qui della seguente osservazione. I due registri di visualizzazione sono entrambi mobilitati ma svolgono ruoli diversi nel lavoro matematico, come si può constatare nel seguente esempio che fa quasi coesistere le tre rappresentazioni visuali sottostanti (Figura 12). Si tratta di stabilire che cosa si ottiene costruendo un triangolo a partire da un primo triangolo seguendo una semplice regola e ripetendo l’operazione. Nell’esempio presentato, il problema è costruire un triangolo a partire dal primo triangolo dato (Nicollier, 2016, pp. 12–15).



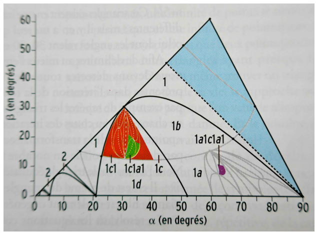
A. Le trasformazioni di un triangolo usate come processo di reiterazione.

Visualizzazione geometrica 2D/2D.



B. I primi 13 triangoli ottenuti a partire dal triangolo più piccolo.

Visualizzazione geometrica 2D/2D



C. «Mappamondo dei triangoli».

Visualizzazione analitico-grafica.

Figura 12. I due registri di visualizzazione matematica.

La visualizzazione geometrica utile è ovviamente la A. La visualizzazione B potrebbe essere considerata come una successione di creazioni artistiche, tra le quali possiamo scegliere quella che meglio si relaziona con la verbalizzazione silenziosa dello sguardo. La terza visualizzazione, la C, è ovviamente quella che consente di vedere l’evoluzione delle trasformazioni successive e, più in generale, tutte le possibili trasformazioni del triangolo, alcune delle quali sono “una porta d’ingresso verso il caos”. Per un matematico, probabilmente non ci sono differenze, o differenze importanti, tra questi due registri di visualizzazione. E, da una rappresentazione all’altra, lo sguardo rimane lo stesso, le conversioni sono implicite o abbastanza naturali tra A, B e C.

Ma, dal punto di vista semio-cognitivo, non esiste alcuna relazione tra questi due tipi di visualizzazione, in quanto i loro modi di funzionamento rappresentazionale sono radicalmente diversi e, soprattutto, dall'uno all'altro lo sguardo cambia completamente, *in quanto la verbalizzazione silenziosa, senza la quale lo sguardo vede senza riconoscere nulla, è radicalmente diversa*. La visualizzazione geometrica 2D/2D richiede, come abbiamo spiegato in precedenza, *una decostruzione dimensionale delle forme in unità figurali nD/2D* che sono indissociabili da un linguaggio che si basa su relazioni e nomi di oggetti. Possiamo quindi caratterizzare nel modo seguente lo sguardo che la visualizzazione geometrica esige:

{*unità figurali nD/2D*, decostruzione dimensionale delle forme, vocabolario geometrico}.

Nella visualizzazione analitico-grafica, si passa da una verbalizzazione silenziosa a un'enumerazione silenziosa di numeri (sulla quale Kant basa l'intuizione a priori … del tempo come pura successione!) e a un'algebrizzazione necessariamente scritta e muta (Duval, in corso di stampa). Questo registro di visualizzazione è limitato alla forma globale dell'unità figurale il cui numero di dimensioni è il maggiore. E lì tutti i gradi di libertà, che permettono il riconoscimento per giustapposizione e il riconoscimento per sovrapposizione, spariscono (*supra*, R.V.2). Ciò che diventa essenziale è il riconoscimento *dei valori visivi qualitativi* di questa forma globale. Tuttavia, questi valori visivi qualitativi non si riconoscono isolatamente ma in un insieme di opposizioni, come tutti i segni linguistici (Duval, 2017, pp. 79–80). In altre parole, il tipo di sguardo che la visualizzazione analitico-grafica esige è quello della lettura. D'altra parte, le relazioni tra la figura e lo sfondo qui si invertono (*supra*, R.V.1). Questo perché la forma globale dell'unità figurale che si impone deve essere riferita ai due assi orientati e graduati, senza i quali non c'è più visualizzazione analitico-grafica. Qualsiasi riconoscimento iconico non può dunque che essere didatticamente fuorviante. Lo sguardo che la visualizzazione analitico-grafica esige è quindi caratterizzato come segue:

{numeri, equazioni, *valori visivi qualitativi di una forma globale*}.

Di fronte a un dipinto, al contrario, la verbalizzazione silenziosa è fondamentale. Perché in questo caso non si tratta di riconoscere ciò che è stato costruito o composto, ma di lasciarsi catturare (e sedurre) solo da ciò che si dà a vedere al primo sguardo e che si rivela sempre nuovo. In questo caso la verbalizzazione silenziosa è un'associazione libera, che può essere spiegata o meno. In questo senso si può dire che un dipinto "parla" allo sguardo, o non parla affatto. Lo sguardo che un quadro o un affresco sollecitano, si caratterizza come segue:

{*quel che viene dato a vedere*, colori, libera associazione di parole}.

Siamo qui alle fonti dell'esplorazione e della creatività nella geometria e nell'arte. Ad esse la geometria elementare e la pittura attingono lo stesso modo di costruire e comporre le forme che esse danno a vedere (R.V.). I quadri appartengono allo stesso registro di rappresentazione delle configurazioni geometriche. Ma le configurazioni geometriche e i quadri divergono fin dall’inizio nel riconoscimento cognitivo di quel che essi danno rispettivamente a vedere (R.C.). Infatti non è lo stesso sguardo, né la stessa modalità di verbalizzazione silenziosa che li guida nei rispettivi processi di esplorazione e creazione. Mentre il dipinto è autosufficiente, in quanto lo sguardo si perde in ciò che è dato a vedere, le configurazioni geometriche evocano un dire che è interamente controllato da un processo di ragionamento, come Platone ha sottolineato nella *Repubblica* (VI, 510 d-e) (Lozza, 1990). In altre parole, la pittura è mono-registro, mentre la geometria richiede la coordinazione cognitiva con il registro della lingua naturale, ma usata in modo opposto rispetto all’uso del modo spontaneo di dire e parlare (*supra*, 3.2).

Va qui notato che stiamo evitando di entrare nel terreno della relazione semiotica fra disegno, oggetto rappresentato (in forma più o meno iconica) e opera d’arte, una relazione sottile sempre più presente, anche in forma evidentemente consapevole da parte degli artisti, almeno a partire dalle opere di Magritte, e poi essa stessa opera d’arte, soprattutto dopo la nascita della corrente “concettuale scientifico” (D’Amore, 2015, pp. 317–322).

6. Quali conseguenze didattiche per l’insegnamento della geometria elementare?

Il confronto tra la visualizzazione geometrica e la visualizzazione pittorica su un supporto materiale consente di evidenziare tre idee guida per l’educazione allo sguardo nell’introduzione della geometria elementare.

Prima di tutto, la visualizzazione geometrica esige uno sguardo, cioè un riconoscimento a prima vista, di tutte le forme possibili 2D/2D, che va non solo contro la percezione 3D/3D, ma anche contro lo sguardo che le altre forme di visualizzazione richiedono (*supra*, RV2' e RV2").

Dopo di che, ogni sguardo su una visualizzazione implica una verbalizzazione spontanea silenziosa che contraddistingue il riconoscimento cognitivo di ciò che essa dà a vedere. Vedere e dire sono nello sguardo la stessa cosa. È in questo senso che ogni immagine “parla” o “non parla”. La verbalizzazione orale spontanea chiarisce e amplifica questa verbalizzazione silenziosa, ma non la modifica. In altre parole, essa non cambia lo sguardo su ciò che una visualizzazione dà a vedere. Ed è questa verbalizzazione silenziosa associata automaticamente a tutte le altre forme di visualizzazione artistica o scientifica che viene a scontrarsi con ciò che gli insegnanti possono spiegare o dire in relazione alle attività geometriche che essi propongono agli studenti. Ciò perché la decostruzione dimensionale delle forme 2D/2D in unità figurative 1D/2D è la prima soglia da far superare agli studenti. Essa è la condizione cognitiva necessaria affinché il vocabolario geometrico più elementare si articoli con le configurazioni di unità figurali 1D o 0D e affinché le parole le possano far vedere (*supra*, R.C.3').

La terza idea guida è la necessità di separare assolutamente ciò che rientra nel riconoscimento visuale e cognitivo delle forme, e ciò che riguarda le dimensioni, vale a dire qualsiasi attività di misurazione per eseguire calcoli usando delle formule. Le illusioni o i paradossi ai quali la costruzione di figure geometriche dà luogo non sono della stessa natura e, soprattutto, richiedono che si passi a una dimensione superiore (3D/2D) invece di eseguire una decostruzione dimensionale (Figura 11). Esse accecano coloro che li invocano come argomenti per subordinare tutto alla conoscenza, al ragionamento e ai concetti.

7. Note conclusive

Evidentemente, questo approccio alla geometria elementare è agli antipodi di quello che suggeriscono i programmi, l'organizzazione delle sequenze di attività in aula e anche i test di acquisizione di conoscenze e tutte le indagini nazionali o internazionali. Non a caso abbiamo scelto la figura geometrica doppiamente codificata riportata sopra (Figura 1B). L'abbiamo presa da due valutazioni nazionali fatte in Francia nel 1997 e nel 1998 all'ingresso della scuola media. Può essere vista sia per sovrapposizione sia per giustapposizione, come abbiamo indicato più volte. Quasi l'80% degli studenti l'ha riconosciuta per sovrapposizione e non per giustapposizione e sono stati ovviamente indotti a rinunciare oppure a misurare (Duval, 2000, pp. 11 e 17). E potremmo trovare gli stessi profili di risposta, a seconda che la figura data vada o no contro il riconoscimento immediato delle forme, in tutte le indagini, comprese quelle fatte alla fine del biennio superiore, con studenti di 15 o 16 anni.

Ma la cosa più strana nell'insegnamento della geometria elementare non è questa. Ignorando il ruolo fondamentale dello sguardo nella comprensione in geometria elementare, e come poterlo realizzare, si è immediatamente portati a privilegiare un approccio concreto e pragmatico in cui si privilegiano le dimensioni e le misure, sul terreno e sul disegno durante le attività di costruzione, per poter utilizzare le diverse formule geometriche riguardanti il contorno, le superfici, i volumi, o anche i teoremi di Pitagora o di Talete. Ma allora ci si scontra ben presto con il fatto che molti studenti non "sanno" riconoscere quale formula usare per calcolare una lunghezza o una superficie in un problema concreto. Allo stesso modo, il passaggio da una geometria sperimentale, in cui si misura e si calcola, a una geometria più deduttiva si rivela incomprensibile e invalicabile.

Ritroviamo qui la domanda iniziale: Come compiere il salto cognitivo dalla percezione e dalla manipolazione di oggetti 3D/3D alla visualizzazione geometrica nD/2D? La possibilità di manipolare oggetti è essenziale per i primi passi nella geometria elementare piana. Ma che cosa viene manipolato esattamente e qual è la relazione tra la manipolazione e la verbalizzazione orale successiva? Tutte le rappresentazioni geometriche sono prodotte su una superficie 2D/3D che funge da supporto materiale e può essere manipolata. Quel che si manipola con un materiale scelto per fare geometria è il supporto. Così si può riprodurre un rettangolo (unità figurale 2D/2D) su un foglio trasparente (supporto 2D/3D), quindi capovolgere il foglio trasparente (*gesto in* 3D/3D) per sovrapporlo alla figura iniziale e vedere se i contorni coincidono. Allo stesso modo, su un modello (oggetto 3D/3D) si possono tracciare delle linee (*gesto* 1D/3D) per ottenere un contorno chiuso (*unità figurale* 2D/2D *nel piano della sezione*). E che dire allora delle rappresentazioni geometriche nD/2D ottenute sullo schermo di un computer, cioè su una superficie dematerializzata? Lo schermo di un computer non è un supporto manipolabile, anche se con uno scorrimento del dito si può modificare o spostare la rappresentazione! E nella pittura la superficie del materiale è inseparabile dalla visualizzazione, come mostrano gli affreschi sulle pareti.

Riferimenti bibliografici

Bkouche, R. (1988). *Quelques grandes problématiques de l’histoire de la géométrie*. Lille: IREM de Lille.

Bkouche, R. (1994). Le projectif ou la fin de l’infini. In Commission inter-IREM (1994), *Histoire d’infini: Actes du 9ème colloque inter-IREM, Épistémologie et histoire des mathématiques, Landerneau 22-23 Mai 1992* (pp. 437–517). Brest: IREM de Brest.

Bonazzi, M. (Ed.). (2010). *Platone, Menone*. Torino: Einaudi.

Bresson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de communication. In J. Piaget, P. Mounoud, & J.-P. Bronckart (Eds.), *Psychologie, Encyclopédie de la Pléiade* (pp. 933–982). Parigi: Gallimard.

Comar, P. (1992). *La perspective en jeu: Les dessous de l’image*. Parigi: Gallimard.

D’Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. In V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D’Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts: Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D’Amore, B. (2015). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.* Bari: Edizioni Dedalo.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142–157). Berlin: Springer.

Duval, R. (2000). Costruire, vedere e ragionare in geometria: Quali rapporti? *Bollettino dei docenti di matematica, 41*, 9–24.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire et écrire: Histoire d'une séquence d'activités. In C. F. Brandt & M. T. Moretti (Eds.), *As Contribuiçoes da Teoria das Representaçoes Sémioticas Para o Ensino e Pesquisa na Educaçao Matematica* (pp. 17–38 in portoghese; pp. 227–251 in francese). Ijuí: Editora Unijuí.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique: "voir" en géométrie. In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Figure* (pp. 147–182). Grenoble: Presses Universitaires.

Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. In M. Iori (Ed.), *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. International Conference in occasion of 70 years of Bruno D'Amore.* Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 08 10 2016 (pp. 213–220). Bologna: Pitagora.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

Duval, R. (in corso di stampa). Écriture et pensée mathématique: Le défi de l'enseignement de l'algèbre élémentaire. In J-P. Drouhard (Ed.), *De la linguistique à l'épistémographie*. Special SFIDA-SFIDE. Sarà disponibile in pdf in HAL: academia.edu

Duval, R., & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*(1), 7–27.

Ferrier, J.-L. (1969). *Entretiens avec Victor Vasarely*. Parigi: Pierre Belfond.

Frère, G.-M. (1920). *Exercices de géométrie*. Parigi: Editions Jacques Gabay.

Freud, S. (2013). *L'interpretazione dei sogni*. Torino: Einaudi. (Lavoro originale pubblicato in lingua tedesca nel 1899 con il titolo: Die *Traumdeutung*.

Gregory, R. L. (1968). Visual illusions. *Scientific American*, *219*(5), 66–76.

Hilbert, D. (1900). *Les principes fondamentaux de la géométrie* (L. Laugel, Trad. in fr.). Parigi: Gauthier-Villars. (Lavoro originale pubblicato nel 1899 in lingua tedesca con il titolo: *Grundlagen der Geometrie*).

Iori, M. (Ed.). (2016). *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. International Conference in occasion of 70 years of Bruno D'Amore*. Bologna: Pitagora.

Lemonidis, E. C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. (Tesi di dottorato). Université Louis Pasteur (U.L.P.), Strasbourg. Disponibile da http://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/3786?id=3786&lang=en&p=1#page/2/mode/2up

Lozza, G. (Ed.). (1990). *Platone, La Repubblica*. Milano: Mondadori.

Müller-Lyer, F. C. (1889). Optische Urteilstäuschungen. *Archiv für Anatomie und Physiologie* (Supplemento), 263–270.

Nicollier, G. (2016). Le triangle: une porte d'entrée vers le chaos. *Pour la Science*, 91, 12–18. Disponibile da https://www.pourlascience.fr/sd/mathematiques/le-trianglenbsp-une-porte-dentree-vers-le-chaos-9019.php

Padilla Sanchez, V. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. (Tesi di dottorato). Université Louis Pasteur (U.L.P.), Strasbourg.

Penrose, L. S., & Penrose, R. (1958). Impossible objects: A special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, *49*(1), 31–33.

Reale, G. (Ed.). (2000). *Aristotele, Metafisica.* Milano: Bompiani.

Remi, G. (Hergé) (1936) [versione bianco e nero]. *Le lotus bleu.* [*Les aventures de Tintin*]. Tournai: Casterman.

Remi, G. (Hergé) (1946) [versione a colori]. *Le lotus bleu.* [*Les aventures de Tintin*]. Tournai: Casterman.

Rommevaux, M.-P. (1991). Le premier pas dans l'espace. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *4*(1), 85–123.

Rommevaux, M.-P. (1997). *Le discernement des plans: Un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. (Tesi di dottorato). Université Louis Pasteur (U.L.P.), Strasbourg.

Rommevaux, M.-P. (1998). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(1), 27–65.

Sorrell, C. (1973). *A field guide and introduction to the geology and chemistry of rocks and minerals.* Racine, WI: Western Publishing Company.

Thuillier, P. (1984). Espace et perspective au Quattrocento. *La Recherche*, 160, 1384–1398.

Vasarely, V. (2011). *Vasarely: Œuvres de 1933 à 1973* [Catalogo della mostra]. Parigi: Galerie Pascal Lansberg.

[Traduzione di Bruno D'Amore e Maura Iori]